Diseño de controladores periódicos constantes por pedazos con retroalimentación de salida aplicando computación simbólica

Luis Moreno-Ahedo[1], Floriberto Ortiz[2] and Rogelio Francisco[3]

***Abstract*— Se presenta el diseño de un controlador periódico, constante por pedazos con retroalimentación de salida para un sistema lineal de segundo orden invariante en el tiempo, aproximando simbólicamente su matriz de monodromía. Se obtiene el plano de estabilidad de los parámetros del controlador y se compara contra resultados de integración numérica.**

I. INTRODUCCIÓN

Considere el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo [1]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y la operación $[\dot{\ }]$ representa derivada con respecto al tiempo t.

Suponga que la matrix $\mathbf{A}$ no es Hurwitz, luego es bien conocido que si $\mathbf{A}$ es controlable entonces [1] la ley de control por retroalimentación estática sin memoria:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

donde $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$; estabiliza el sistema (1).

Nótese que, si solamente la salida $\mathbf{y}(t)$ está disponible entonces una ley de control con retroalimentación de salida [2]:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t)$$

puede ser utilizada. Por otro lado, un observador de estado clásico [3] es aplicable.

Sin embargo, la estabilización del sistema (1) puede también llevada a cabo considerando una clase más general de controladores: controladores variantes en el tiempo.

La formulación del problema sobre utilizar controladores variantes en el tiempo es debida a Brockett [4].

Problema 1: (Problema de estabilización de Brockett) Dadas las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ del sistema (1). ¿Bajo qué condiciones la ley de control variante en el tiempo

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{y}(t)$$

existe tal que el sistema (1) es asintóticamente estable? ∎

El problema de estabilización de Brockett es considerado un problema abierto de control. Una solución al problema fué presentada por [5]

[1]Luis Moreno-Ahedo esta con Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco, Coacalco de Berriozabál, Edo. México `lmoreno@ieee.org`

[2]Floriberto Ortiz esta con ESIME-IPN, México D.F `flortiz@ipn.mx`

[3]Rogelio Francisco esta con Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, Ecatepec de Morelos, Edo. México `rfrancisco27z@hotmail.com`

Sin embargo, el problema de estabilización de Brockett puede ser manejable considerando una clase reducida de controladores variantes en el tiempo, a saber: los controladores periódicos en el tiempo.

La primera referencia en la literatura sobre el uso de fuerzas periódicas para cambiar las propiedades de sistemas dinámicos fue reportada por Stephenson en [6], y décadas después por Kapitza en su famoso péndulo [7]. Esta clase de control recibió el nombre de Control Vibracional por Meerkov en [8]. Después, el principio de control vibracional fue establecido en [9].

Para resolver el problema sobre el diseño de controladores periódicos, al menos dos enfoques se han desarrollado. El primero enfoque usa el principio de promediación [10], está basado en el cambio de base en las coordenadas de estado de sistema y es sólo aplicable a una clase especial de sistemas dinámicos [11].

El segundo enfoque está basado en el uso de funciones periódicas constantes por pedazos [12]. Recientemente en [13] se estableció la condición necesaria y suficiente para la estabilización de sistemas una-entrada-una-salida utilizando controladores periódicos constantes por pedazos. Sin embargo, tales resultados son de interés teórico, y hasta ahora no existen resultados prácticos sobre el diseño de controladores periódicos constantes por pedazos.

El objetivo del presente trabajo es desarrollar un marco de trabajo para el diseño de tales controladores; haciendo énfasis en que el conjunto de sistemas estabilizables por una retroalimentación de salida no es genérica, ver [2]. Luego, el uso de controladores periódicos con retroalimentación de salida proporciona una herramienta simple de establización más flexible que la retroalimentación de salida, esto considerando el hecho que existen sistemas que no son establizables por una retroalimentación de salida.

El desarrollo del trabajo es como sigue: en sección II se formula el problema a tratar. En sección III se estable el Teorema de Floquet como herramienta para realizar un análisis de la estabilidad en sistemas periódicos. Mientras que en sección IV se hace el cálculo simbólico de la matriz de monodromiía para justificar el enfoque de la aproximacíon simbólica de la matriz de monodromía dato en V donde se proporciona el algoritmo para tal fin. En VI se proporciona un ejemplo y finalmente las concluciones en VII

II. Formulación del problema

En este trabajo consideraremos sistemas lineales de segundo orden de una-entrada una-salida dados por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}'\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{2}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^2$.

Suponga que la traza $\operatorname{tr}\big[\mathbf{A}\big] < 0$, es decir, existe una ley de control periódica [8]:

$$u(t) = k(t)\mathbf{y}(t)$$

tal que (2) es estable; donde $k(t) = k(t+T)$ y T es el periódo mímino.

Restringiremos la ganancia periódica en el tiempo $k(t)$ a una ganancia contante por pedazos:

$$k(t) = \begin{cases} k_1 & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ k_2 & t \in (\frac{T}{2}, T] \end{cases} \tag{3}$$

Luego, el problema puede ser formulado como sigue:

Problema 2: Dadas $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ en el sistema de lazo cerrado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \big(\mathbf{A} + \mathbf{b}k(t)\mathbf{c}\big)\mathbf{x}(t) \tag{4}$$

¿Para cuáles constantes k_i y cúal periódo T el sistema en lazo cerrado (4) es asintóticamente estable?

III. Análisis de estabilidad

El sistema en lazo cerrado (4) pertenece a los Sistemas Lineales Periódicos en el Tiempo (LPT) [14]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x} \tag{5}$$

donde $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t+T)$.

El análsis de establidad de sistemas LPT puede ser llevado a cabo por una variedad de técnicas bien establecidas como son: el método de perturbación [15], el método del determinante infinito de Hill [16], entre otros. Sin embargo, en este trabajo aplicaremos el teorema de Floquet [14], puesto que es el más adecuado para desarrollar un enfoque computacional.

Teorema 1: (Teorema de Floquet) Cualquier $\mathbf{\Phi}$ matriz fundamental del sistema (5) puede ser escrita como:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{R}t}$$

donde $\mathbf{R}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{P}$ es no-singular y periódica $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(T+t)$. $\blacksquare$

Luego, $\mathbf{\Phi}(t+T)$ es también una matriz fundamental del sistema (5), entonces por la propiedad de similaridad de matrices $\mathbf{\Phi}(t+T) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$. Aplicando el logaritmo de una matriz [17], existe una matriz $\mathbf{C} = e^{\mathbf{R}T}$ tal que $\mathbf{\Phi}(t+T) = \mathbf{\Phi}(t)e^{\mathbf{R}T}$, por tanto si $t = 0$ entonces $\mathbf{C} = e^{\mathbf{R}T} = \mathbf{\Phi}^{-1}(0)\mathbf{\Phi}(T)$; tal expresión nos lleva a la siguiente definición:

Definición 1: (Matriz de Monodromía) Sea $\mathbf{\Phi}(t)$ una matriz fundamental del sistema (5). Entonces, la matriz

$$\mathbf{C} := \mathbf{\Phi}^{-1}(0)\mathbf{\Phi}(T)$$

es llamada la matriz monodromía del sistema (5). $\blacksquare$

Los valores propios λ_i de la matriz monodromía, llamados multiplicadores de Floquet, juegan un rol importante para determinar la estabilidad de los sistemas LPT como establece el siguiente teorema:

Teorema 2: Sean λ_i los multiplicadores Floquet del sistema (5). Luego la solución trivial del sistema (5) es:

(i) Asintóticamente estable si y solo si $|\lambda_i| < 1 \vee i$;
(ii) Estable cuando $|\lambda_i| < 1$ siempre que $|\lambda_i| = 1$, $|\lambda_i|$ sea un multiplicador simple;
(iii) Inestable siempre que exista al menos un $|\lambda_{i_u}| > 1$ $\blacksquare$

El resultado anterior es elegante, pero calcular los multiplicadores de Floquet en casos prácticos es casi imposible.

Sin embargo, cuando la matriz de estado $\mathbf{F}(t)$ es constante por pedazos, entonces el sistema se vuelve integrable, luego la matrix de monodromía se calcula simplemente como el producto de las matrices de transición de estados sobre el periódo fundamental T, es decir:

$$\mathbf{\Phi}(T, 0) = \mathbf{\Phi}(T, t_m)\mathbf{\Phi}(t_m, t_{m-1})\ldots\mathbf{\Phi}(t_1, 0)$$

donde $T > t_m > \ldots > t_1 > 0$

Este hecho aunque práctico resulta algebráicamente laborioso como se verá más adelante.

Por otro lado, en sistemas de segundo orden el criterio de estabilidad de los multiplicadores de Floquet es remplazado por la evaluación de la traza de la matriz de monodromía como se verá a continuación.

A. Anális de estabilidad para sistemas periódicos de segundo orden

Los sistemas de segundo orden dados en (4) pueden ser escritos como:

$$\ddot{y} + P(t)\dot{y} + Q(t)y = 0 \tag{6}$$

donde $P(t+T) = P(t)$ y $Q(t+T) = Q(t)$.

El cambio de coordenadas [18]:

$$y(t) = x(t)e^{-\frac{1}{2}\int_0^t P(t)dt} \tag{7}$$

transforma la ecuación (6) en:

$$\ddot{x} + \Big(1 - \frac{1}{4}P(t)^2 + Q(t)\Big)x = 0 \tag{8}$$

La ecuación anterior puede ser escrita como una ecuación de Hill, [19]:

$$\ddot{x} + \big(\alpha + \beta p(t)\big)x = 0 \tag{9}$$

donde $p(t+T) = p(t)$ y $\int_0^T p(t) = 0$.

Existen casos especiales de la ecuación de Hill dependiendo de la naturaleza de la fuente de excitación paramétrica, a saber: si $p(t) = \cos t$ entonces tenemos la ecuación de Mathieu [20].

Por otro lado, si $p(t)$ es una función cuadrada, entonces se produce la ecuación de Meissner [21]. Nótese que el sistema (4) se puede reducir a una ecuación Meissner.

La ecuación de Hill escrita en variables de estado, esta dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta p(t) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \qquad (10)$$

Sea $\mathbf{\Phi}$ una matriz fundamental de la ecuación (10), suponga que $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}(T)$ es la matriz de monodromía del sistema (10). Los valores propios de $\mathbf{C}$ están dados por $p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}[\mathbf{C}]\lambda + \det[\mathbf{C}]$ aplicando la fórmula de Liouville[1] produce $\det[\mathbf{C}] = 1$ entonces $\lambda_i = \frac{1}{2}\left[\phi \pm \sqrt{\phi^2 - 4}\right]$ donde $\phi = \mathrm{tr}[\mathbf{C}] = \mathrm{tr}[\mathbf{\Phi}(T)]$ es la traza de la matriz de monodromía , aplicando el teorema 2 el siguiente criterio es deducido:

Criterio 1: Sea $\phi = \mathrm{tr}[\mathbf{\Phi}(T)]$ la traza de la matriz de monodromía y $x(t)$ la solución del sistema (10) entonces, [20]:

(i) Si $|\phi| < 2$ entonces $x(t)$ es acotada
(ii) Si $|\phi| > 2$ entonces $x(t)$ es no acotada
(iii) Si $|\phi| = 2$ entonces una solución $x(t)$ es periódica ∎

El resultado anterior establece una alternativa simple para estudiar la estabilidad de sistemas lineales periódicos de segundo orden.

IV. Cálculo algebráico de la matriz de monodromía para sistemas de segundo orden

En la sección anterior establecimos que los sistemas de segundo orden (4) pueden ser escritos como una ecuación de Meissner, es decir como dos ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \lambda_1^2 x &= 0 \text{ para } [0, \tfrac{T}{2}] \\ \ddot{x} + \lambda_2^2 x &= 0 \text{ for } (\tfrac{T}{2}, T] \end{aligned}$$

donde $\lambda_1^2 = \alpha + \beta$ y $\lambda_2^2 = \alpha - \beta$.

Suponga que $\alpha > \beta$. En ambas ecuaciones la solución general es $x(t) = c_1 \cos \lambda_i t + c_2 \sin \lambda_i t$, donde c_j son constantes, sea $\nu = \{\cos \lambda_i t, \frac{1}{\lambda_i} \sin \lambda_i t\}$ es el conjunto mínimo de vectores generadores del espacio vectorial de soluciones, entonces la matriz de transición de estados es:

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} \cos \lambda_i t & \frac{1}{\lambda_i} \sin \lambda_i t \\ -\lambda_i \sin \lambda t & \cos \lambda_i t \end{bmatrix}$$

Cualquier matriz fundamental de (4) esta dada por: $\mathbf{\Phi}(t_2, t_1) = \mathbf{W}(t_2)\mathbf{W}^{-1}(t_1)$ donde $\mathbf{W}^{-1} = \mathrm{adj}\,[\mathbf{W}(t_1)]$ [2] luego $\mathbf{\Phi}(t_2, t_1) = \mathbf{W}(t_2)\,\mathrm{adj}\,[\mathbf{W}(t_1)]$, es decir:

$$\mathbf{\Phi}(t_2, t_1) = \begin{bmatrix} \cos \lambda_i (t_2 - t_1) & \frac{1}{\lambda_i} \sin \lambda_i (t_2 - t_1) \\ -\lambda_i \sin \lambda_i (t_2 - t_1) & \cos \lambda_i (t_2 - t_1) \end{bmatrix}$$

La matriz fundamental de (4) en el intervalo $[0, T]$ es entonces $\mathbf{\Phi}(T, 0) = \mathbf{\Phi}(T, \frac{T}{2})\mathbf{\Phi}(\frac{T}{2}, 0)$, luego la matriz de monodromía de (4) esta dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_2 \frac{T}{2} \cos \lambda_1 \frac{T}{2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \frac{T}{2} \sin \lambda_1 \frac{T}{2} & \frac{1}{\lambda_1} \cos \lambda_2 \frac{T}{2} \sin \lambda_1 \frac{T}{2} + \frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \frac{T}{2} \cos \lambda_1 \frac{T}{2} \\ -\lambda_1 \cos \lambda_2 \frac{T}{2} \sin \lambda_1 \frac{T}{2} - \lambda_2 \sin \lambda_2 \frac{T}{2} \cos \lambda_1 \frac{T}{2} & \cos \lambda_2 \frac{T}{2} \cos \lambda_1 \frac{T}{2} - \frac{\lambda 2}{\lambda_1} \sin \lambda_2 \frac{T}{2} \sin \lambda_1 \frac{T}{2} \end{bmatrix}$$

Cuya traza $|\phi|$ es:

$$\begin{aligned} |\phi| &= \Big| 2\cos(\lambda_2 \frac{T}{2})\cos(\lambda_1 \frac{T}{2}) \\ &- \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right] \sin(\lambda_2 \frac{T}{2}) \sin(\lambda_1 \frac{T}{2}) \Big| \qquad (11) \end{aligned}$$

Ahora, encontrar los valores k_i y T de la ganancia periódica (3) tal que el sistema (4) sea estable es necesario resolver numéricamente la ecuación no lineal dada por la expresión anterior. Sin embargo las técnicas para resolver una ecuación no lineal dependen de una primera aproximación para la convergencia de las raíces. Por otro lado, el resultado anterior sólo es válido para $\alpha > \beta$, en otro caso la matriz de monodromía debe ser calculada nuevamente.

Para solventar estos inconvenientes aplicaremos un esquema que aproxime la matrix de monodromía; entre los esquemas desarrollados hasta ahora están [23], [24], y recientemente por los autores [25]. El algoritmo es descrito brevemente en la sección siguiente.

V. Aproximación simbólica de la matriz de monodromía

El algoritmo desarrollado en [25] utiliza el Método de Taylor de orden M para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias [26]. El Método de Taylor cálcula explicitamente M derivadas, este hecho puede ser utilizado para desarrollar un esquema para la aproximación simbólica de la matriz de monodromía en términos de sus parámetros. Tal esquema esta dado en el pseudocodigo V.1.

El algoritmo descrito aproxima simbólicamente la matriz de monodromía en términos de sus parámetros. Luego, tal puede ser utilizado para aproximar la matriz de monodromía del sistema (4) en términos de los parámetros k_1 y k_2 para un T fijo. Y aplicando el criterio de la traza (1) encontrar un plano de estabilidad de los parámetros.

[1] [22] Sea $\mathbf{\Phi}(t)$ una matriz fundamental $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ entonces $\det|\mathbf{\Phi}(t)| = \det|\mathbf{\Phi}(0)|\, e^{\int_{t_o}^{t} \mathrm{tr}\,\mathbf{A}(s)ds}$

[2] $\mathbf{W}^{-1}(t_1) = \frac{\mathrm{adj}[\mathbf{W}(t_1)]}{\det \mathbf{W}(t_1)}$ y $\det[\mathbf{W}(t)] = 1$ $t \in [0, T]$

Algorithm V.1: MONODROMYMATRIX(A, T, n, M)

$\mathbf{F} := \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_j^i[t];\, h := \frac{T}{n};\, \mathbf{S} := \mathbf{x}_j^i[t]$
for $l := 1$ **to** M

$$\textbf{do} \begin{cases} \mathbf{F} := \dfrac{d\mathbf{F}}{dt} \\ \mathbf{S} := \mathbf{S} + \dfrac{h^l}{l!}\mathbf{F} \end{cases}$$

t:=0;
for $i := 1$ **to** 2

$$\textbf{do} \begin{cases} \mathbf{S}_i := \mathbf{S} \\ \mathbf{x}_j^i[0] = \mathbf{e}_i \\ \textbf{for } j := 1 \textbf{ to } n \\ \quad \textbf{do} \\ \left\{ \mathbf{x}_j^i[t+h] := \mathbf{S}_i[t] \right|_t \\ t := t + h \end{cases}$$

$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n^1 & \mathbf{x}_n^2 \end{bmatrix}$

VI. EJEMPLOS

Considere el sistema de segundo orden descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{12}$$

donde a_i y $c_i \in \mathbb{R}$.

Suponga que $\mathrm{tr}[A] < 0$ luego existe una ley de control con retroalimentacón de salida periódica y constante por pedazos $u(t) = k(t)y(t)$ que estabiliza el sistema. Suponga que el periodo mínimo es $T = \pi$. Luego, el problema se reduce a encontrar para qué parámetros k_1,k_2 de la ganancia periódica $k(t)$

$$k(t) = \begin{cases} k_1 & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ k_2 & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

el sistema (12) es estable.

Para encontrar tales aplicaremos el criterio 1, para lo cual aplicando la transformación (7) al sistema (12), este se transforma en una ecuación de Meissner:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4 - \left(a_2 + c_2 k(t)\right)^2 - 4(a_1 + c_1 k(t))}{4} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) \tag{13}$$

Para fines prácticos suponga que la matriz de estado $\mathbf{A}$ esta dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_i = 1, -2$, i.e. A no es Hurwitz.

Considere que $b_1 = 1, c_1 = 1$ y $c_2 = 1$ luego el sistema (13) se reduce a:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{4} - \frac{k(t)}{2} - \frac{k(t)^2}{4} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) \tag{14}$$

A. Cálculo simbólico del plano de estabilidad $k_1 - k_2$

La aproximación de la traza de la matriz de monodromía del sistema (14) aplicando el algoritmo V.1 produce un polinomio en términos de los parámetros k_1 y k_2:

$$\begin{aligned} \phi \;=\; & 1.86406 + 0.254562k_1 + 0.178169k_1^2 \\ & + 0.04575k_1^3 + ... + 7.04061^{-11}k_1^{12}k_2^2 \\ & + 5.0884^{-12}k_1^{13}k_2^2 + ... + 6.6948^{-329}k_1^{91}k_2^{96} \\ & + 7.2381^{-331}k_1^{92}k_2^{96} - 1.2505k_1^{92}k_2^{96} \end{aligned}$$

El polinomio anterior puede ser graficado como se muestra en la figura 1

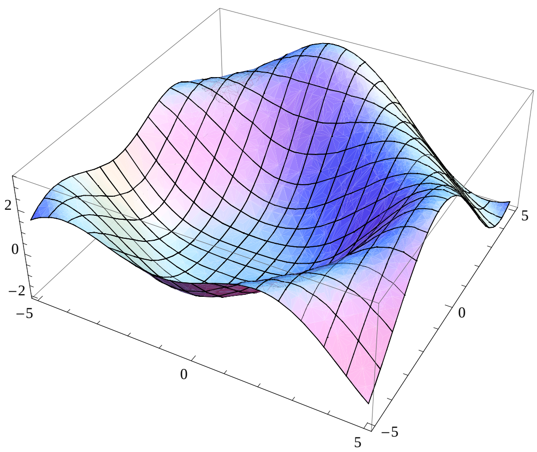

Fig. 1. Cálculo numérico de plano de estabilidad $k_1 k_2$

Para obtener el plano de estabilidad $k_1 - k_2$ aplicando el criterio 1 de la traza construyendo una gráfica de contorno dada en la figura 2.

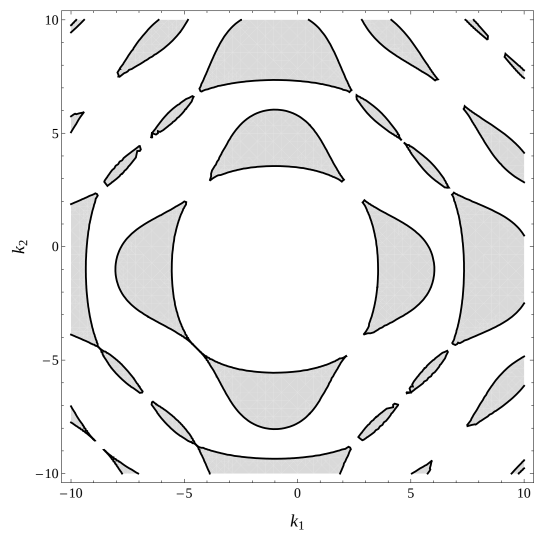

Fig. 2. Cálculo simbólico del plano de estabilidad $k_1 k_2$

Las regiones sombreadas corresponden a puntos (k_1, k_2) tales que la respuesta del sistema (14) es no-acotada, mientras que las regiones en blanco corresponde a soluciones acotadas del sistema (14).

Para corroborar los resultados expuestos se hará un barrido del plano $k_1 - k_2$ y se aplicaá integración numérica.

B. Cálculo numérico del plano de estabilidad $k_1 - k_2$

Para calcular numéricamente el plano de estabilidad $k_1 - k_2$, para cada punto del plano (k_1, k_2) resolvemos el sistema (14) para un número fijo de periódos, se obtiene la norma infinita de la solución y por cada solución al infinito marcamos un punto en el plano de estabilidad. El resultado de este barrido se muestra en la figura 3.

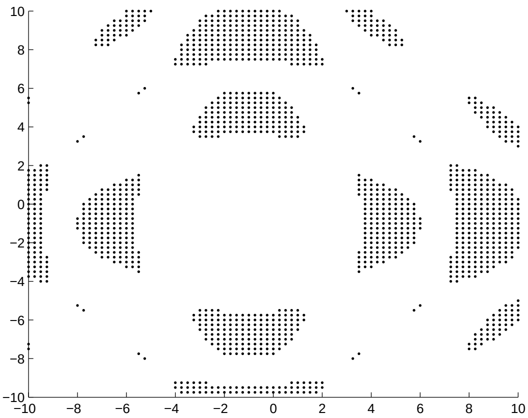

Fig. 3. Cálculo numérico de plano de estabilidad $k_1 k_2$

Como es de esperarse nuestro enfoque del cómputo simbólico es válido.

VII. Conclusiones

El diseño de controladores variantes en el tiempo está relacionado con el Problema de Estabilización de Brockett el cual se considera un problema abierto en la Teoría de Control Moderna. Este trabajo nos restringimos al diseño de controladores periódicos contantes por pedazos en sistemas de segundo orden. Utilizando la teoría de Floquet se utiliza la matriz de monodromía como herramienta para estudiar la estabilidad de tales. La matrix de monodromía se aproxima simbólicamente en términos de los parámetros del controlador periódico utilizando un algoritmo basado en el Método de Taylor de Orden M, tal aproximación permite obtener una gráfica de contorno del plano de estabilidad de los parámetros del controlador. Se realiza una comparación contra una integración numérica en el plano de parámetros.

References

[1] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd ed. New York ; Oxford: Oxford University Press, 1999.

[2] V. Syrmos, C. Abdallah, and P. Dorato, “Static output feedback: a survey,” in *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, 1994, pp. 837 –842 vol.1.

[3] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*. New York: Wiley, 1969.

[4] R. Brockett, *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, 1st ed. London: Springer-Verlag, 1998, ch. 16, pp. 75–78.

[5] I. V. Boikov, “The Brockett stabilization problem,” *Automation and Remote Control*, vol. 66, no. 5, pp. 746–751, 2005.

[6] A. Stephenson, “On a new type of dynamical stability,” *Mem. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.*, vol. 52, pp. 1–10, 1908.

[7] P. Kapitza, “Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates and pendulum with a vibrating suspension,” in *In Collected papers of P.L. Kapitza*, D. T. Harr, Ed. London: Pergamon Press Ltd., 1951, vol. 2.

[8] S. M. Meerkov, “Vibrational control theory,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 303, no. 2, pp. 117–128, 1977.

[9] S. Meerkov, “Principle of vibrational control: Theory and applications,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 25, no. 4, pp. 755–762, aug 1980.

[10] L. Moreau and D. Aeyels, “Stabilization by means of periodic output feedback,” in *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, vol. 1, 1999, pp. 108–109.

[11] ——, “Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree,” *Systems & Control Letters*, vol. 51, no. 5, pp. 395 – 406, 2004.

[12] G. Leonov, “On the Brockett stabilization problem,” *Doklady Physics*, vol. 46, pp. 268–270, 2001.

[13] J. Allwright, A. Astolfi, and H. Wong, “A note on asymptotic stabilization of linear systems by periodic, piecewise constant, output feedback,” *Automatica*, vol. 41, no. 2, pp. 339 – 344, 2005.

[14] V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii, *Linear Differential Equations With Periodic Coefficients*. Israel: Krieger Pub Co, 1975.

[15] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*. New York: Wiley, 1973.

[16] D. Jordan and P. Smith, *Nonlinear ordinary differential equations*. Oxford: Clarendon Press, 1987.

[17] A. R. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1985.

[18] C. Hayashi, *Forced oscillations in non-linear systems*, 1st ed. Osaka: Nippon Print. and Pub. Co, 1953.

[19] W. Winkler and S. Magnus, *Hill's Equation*. New York: John Wiley and Son Ltd, 1966.

[20] L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*. New York: USA: Dover Publications, 2003.

[21] N. Minorsky, *Nonlinear Oscillations*. Krieger Pub Co, 1974.

[22] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*. New York: Springer-Verlag, 1999.

[23] S. C. Sinha and E. A. Butcher, “Symbolic computation of fundamental solution matrices for linear time-periodic dynamical systems,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 207, no. 61-85, 1997.

[24] A. G. M. Neves, “Symbolic computation of high order exact picard iterates for systems of linear differential equations with time periodic coefficients,” *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2657, pp. 656–657, 2003.

[25] L. Moreno and J. Collado, “New scheme for symbolic computation of monodromy matrix,” in *Proceedings of The European Control Conference*, 2009, pp. 1389–1394.

[26] P. Henrici, *Elements of Numerical Analysis*. USA: John Wiley and Sons Inc, 1966.